
Fonctions Elliptiques de Jacobi

Théorie et Applications

Noah Roetman



Carl Gustav Jacob Jacobi

Table des matières

INTRO	3
I - DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS	3
1 - Ellipses	3
2 - Définition	4
a - intégrale elliptique de première espèce	4
b - définition par inversion	4
c - interprétation graphique réelle	5
3 - Généralisation au plan complexe	8
a - notions sur les fonctions complexes	8
b - rectangle de Jacobi	10
c - interprétation graphique complexe	12
II - FORMULES ET PROPRIÉTÉS	13
1 - Valeurs remarquables	14
2 - Relations fondamentales	14
3 - Interpolation	15
4 - Période	16
5 - Parité	16
6 - Addition et duplication	17
7 - Calcul différentiel et intégral	18
a - dérivées	18
b - primitives	19
8 - Équations différentielles	20
III - APPLICATIONS	20
1 - Moyenne arithmético-géométrique (AGM)	21
a - définition	21
b - application	21
2 - Pendule simple	22
a - expression et période	22
b - simulation numérique	22
3 - Ondes non linéaires	23
4 - Cryptographie et théorie des nombres	24
CONCLUSION	24

INTRO

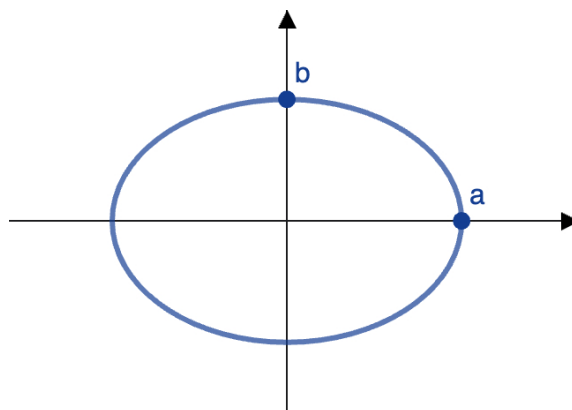
Les fonctions elliptiques de Jacobi naissent d'une frustration mathématique : l'incapacité des fonctions élémentaires (polynômes, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques etc...) à exprimer certaines mesures fondamentales.

Le problème initial, qui donne son nom à ces fonctions, est celui du calcul de la longueur d'un arc d'ellipse. Contrairement au cercle, dont la circonférence se calcule facilement, l'ellipse nécessite l'usage d'intégrales dites elliptiques qui ne possèdent pas de primitives exprimables avec les fonctions classiques.

Pour résoudre ce blocage, Jacobi a eu l'idée de définir de nouvelles fonctions par inversion de ces intégrales. Ce faisant, il a découvert un univers mathématique d'une grande richesse.

I - DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

1 - Ellipses



L'étude des fonctions de Jacobi repose sur la géométrie de l'ellipse.

Définition (D1) : Équation de l'ellipse

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

L'ellipse centrée à l'origine du plan cartésien, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b , est définie par l'équation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Définition (D2) : Excentricité

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \geq b > 0$.

L'ellipse est caractérisée par un paramètre fondamental : son excentricité, notée k , qui mesure son aplatissement. Elle est comprise dans l'intervalle $[0, 1[$ et est défini par la relation :

$$k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Remarque :

Dans le contexte des fonctions elliptiques, k est appelé le module.

Pour $k = 0$ (soit $a = b$), l'ellipse est un cercle.

Lorsque k tend vers 1, l'ellipse est étirée jusqu'à tendre vers une droite.

Remarque pour la suite :

On se place dans le cas où $b = 1$ et $a > 1$, car c'est dans ce cadre qu'on peut considérer les fonctions elliptiques.

2 - Définition

Dans toute cette partie, on fixe $k \in [0, 1[$.

a - intégrale elliptique de première espèce

Pour passer de la géométrie de l'ellipse aux fonctions de Jacobi, il est nécessaire d'introduire l'intégrale elliptique.

Définition (D3) : Intégrale elliptique

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'intégrale elliptique incomplète de première espèce, notée $F(\alpha, k)$, est définie par :

$$F(\alpha, k) = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}.$$

On dit que α est l'amplitude de l'intégrale.

b - définition par inversion

Le concept fondamental de Jacobi réside dans l'inversion de l'intégrale elliptique.

Définition (D4) : Amplitude de Jacobi

Soit $u \in \mathbb{R}$.

On définit l'amplitude de Jacobi, notée $am(u, k)$ comme la fonction réciproque de l'intégrale elliptique telle que :

$$u = F(\alpha, k) \iff \alpha = am(u, k).$$

Définition (D5) : Fonctions elliptiques

Soit $u \in \mathbb{R}$.

À partir de fonction $am(u, k)$, on définit les trois fonctions elliptiques primaires :

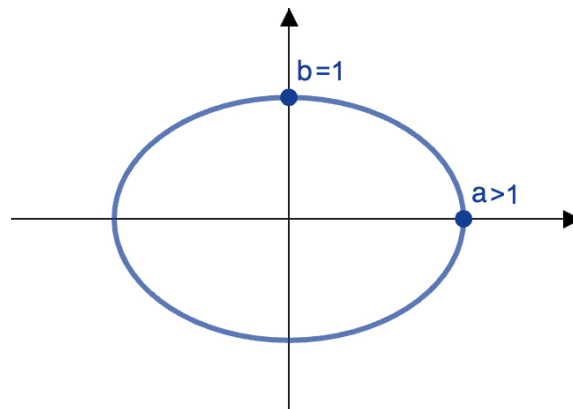
Sinus de Jacobi : $sn(u, k) = \sin(am(u, k))$,

Cosinus de Jacobi : $cn(u, k) = \cos(am(u, k))$,

Fonction delta de Jacobi : $dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)}$.

Remarque :

Contrairement aux fonctions trigonométriques classiques qui ne dépendent que d'une variable, ces fonctions sont à deux variables car elles dépendent à la fois de la variable u et du module k .

c - interprétation graphique réelle

On rappelle qu'on est dans le cas spécifique où l'on fixe $b = 1$ et $a > 1$. Dans ce cadre, les fonctions de Jacobi admettent une interprétation géométrique directe liée aux coordonnées d'un point sur l'ellipse.

Proposition (P1) : Position sur l'ellipse

Soit $u \in \mathbb{R}$,

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On considère le point de coordonnées (x, y) circulant sur l'ellipse de module k . On pose $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ sa distance à l'origine. Alors, sa position peut être paramétrée de la manière suivante :

Ordonnée : $y = sn(u, k)$,

Abscisse normalisée : $\frac{x}{a} = cn(u, k)$,

Rayon vecteur normalisé : $\frac{r}{a} = dn(u, k)$.

Démonstration. (P1) : On pose $\alpha := am(u, k)$ l'amplitude du mouvement.

D'après l'équation de l'ellipse, pour $b = 1$, on a :

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1.$$

Par analogie avec l'équation du cercle, on a $y = \sin(\alpha)$.

Or, comme $sn(u, k) = \sin(\alpha)$, on a $y = sn(u, k)$.

En remplaçant dans l'équation de l'ellipse, on obtient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \sin^2(\alpha) = 1,$$

$$\text{donc } \frac{x^2}{a^2} = 1 - \sin^2(\alpha).$$

$$\text{donc } \frac{x^2}{a^2} = \cos^2(\alpha),$$

donc $\frac{x}{a} = \cos(\alpha)$ (en prenant la racine positive),

donc $\frac{x}{a} = cn(u, k)$ d'après ce qui précède.

On sait que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{On a } \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \frac{r^2}{a^2} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2},$$

$$\text{donc } \left(\frac{r}{a}\right)^2 = cn^2(u, k) + \frac{sn^2(u, k)}{a^2},$$

$$\text{donc } \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - sn^2(\alpha) + \frac{sn^2(\alpha)}{a^2},$$

$$\text{donc } \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - sn^2(\alpha)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right).$$

Or, comme $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ on obtient $k^2 = 1 - \frac{1}{a^2}$.

$$\text{Donc } \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - k^2 sn^2(\alpha).$$

On montrera par la suite que $dn^2(u) + k \cdot sn^2(u) = 1$ (P8).

On obtient donc $\left(\frac{r}{a}\right)^2 = dn^2(u)$.

D'où $\frac{r}{a} = dn(u, k)$. ■

Proposition (P2) : Relation différentielle

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

Soit $\theta \in [0, \alpha]$,

On considère r défini comme précédemment.

Alors : $du = \frac{a}{r} d\alpha$.

Démonstration. (P2) : On sait que $u = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} (*)$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a, par dérivation :

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\alpha)}},$$

$$\text{donc } du = \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\alpha)}}.$$

Or, on sait que $dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)}$ et que $sn(u, k) = \sin(\alpha)$,

$$\text{donc } dn(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}.$$

De plus, on a $dn(u, k) = \frac{r}{a}$,

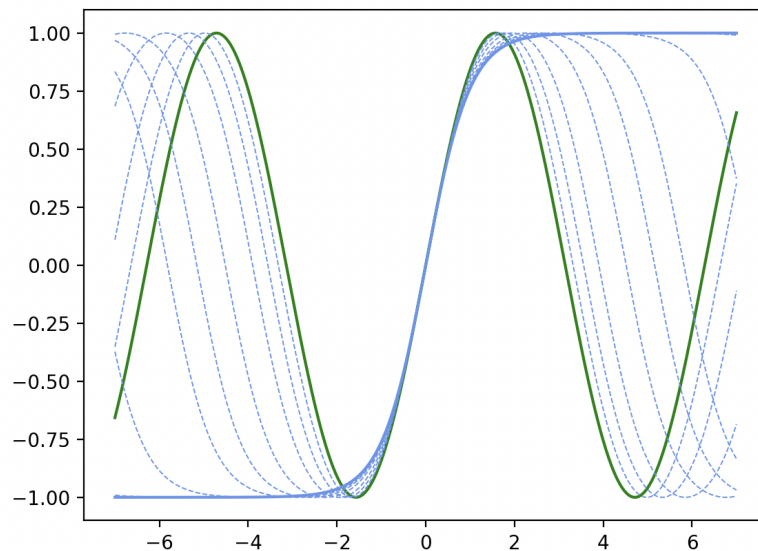
$$\text{donc } \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)} = \frac{r}{a}.$$

En remplaçant dans (*), on obtient $du = \frac{a}{r} d\alpha$. ■

Remarque :

Ainsi, alors que les fonctions trigonométriques circulaires décrivent le mouvement sur un cercle ($a = b = 1$), les fonctions de Jacobi décrivent le mouvement et les distances sur une trajectoire elliptique.

Interprétation visuelle :

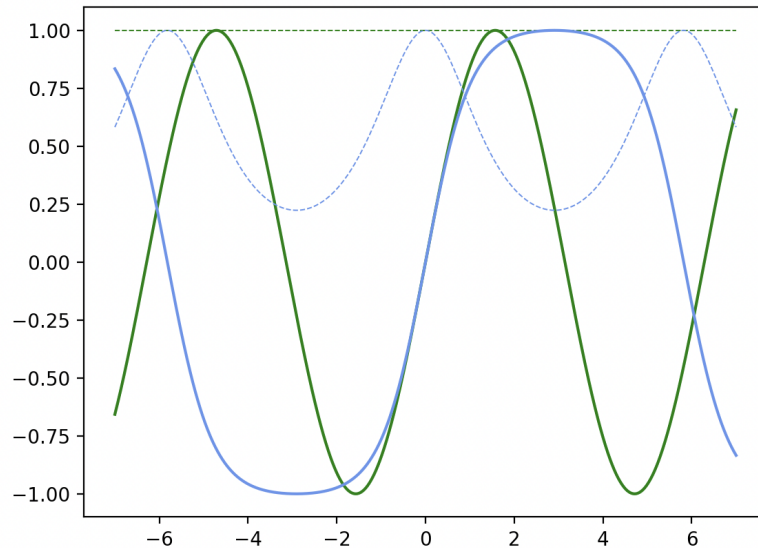


Les courbes de ces fonctions peuvent être tracées dans le plan réel.

Ci-dessus la fonction sn , faisant varier u pour différents k . La courbe verte représente $sn(u, k)$ pour $k=0$.

Elle correspond à la courbe de la fonction \sin . Plus on augmente k , plus la sinusoïde se déforme et s'étire.

A la limite, lorsque $k \rightarrow 1$, la fonction correspond à \tanh .



La fonction dn permet de visualiser la déformation de la sinusoïde.

On représente en trait plein, en vert et en bleu les fonctions $sn(u, 0)$ et $sn(u, 0.7)$ respectivement.

Plus la fonction sn est étirée, plus les variations de dn sont marquées.

3 - Généralisation au plan complexe

Pour comprendre la nature profonde des fonctions de Jacobi, il est nécessaire d'étendre leur étude au plan complexe.

Cette approche permet de les définir non plus seulement par un calcul d'intégrale, mais par leurs propriétés structurelles.

On fixe encore $k \in [0, 1[$.

a - notions sur les fonctions complexes

Soit $D \subset \mathbb{C}$

Définition (D6) : Fonction holomorphe

Une fonction est dite holomorphe sur D si elle est dérivable au sens complexe en chaque point de D . L'ensemble des fonctions holomorphes de D dans \mathbb{C} est noté $\mathcal{H}(D)$.

Remarque :

Ces fonctions sont extrêmement régulières et peuvent être développées en série entière autour de n'importe quel point de leur domaine de définition.

Elles sont dites analytiques.

Définition (D7) : Fonction méromorphe

Une fonction est dite méromorphe si elle peut être définie comme le quotient de deux fonctions holomorphes.

L'ensemble des fonctions méromorphes de D dans \mathbb{C} est noté $\mathcal{M}(D)$.

Remarque :

Une fonction méromorphe est donc "presque partout holomorphe", sauf en certains points isolés où le dénominateur s'annule.

On a ainsi $\mathcal{H}(D) \subset \mathcal{M}(D)$.

Définition (D8) : Zéro et Pôles

Soient $g, h \in \mathcal{H}(D)$,

Soit $f \in \mathcal{M}(D)$ tel que $f = \frac{g}{h}$,

Soient $p, q \in D$,

Le comportement d'une fonction méromorphe est caractérisé par ses points singuliers :

Le Zéro : Si $g(p) = 0$ (et $h(p) \neq 0$), on dit que p est un zéro de f .

En un tel point, on a $f(p) = 0$.

Le Pôles : Si $h(q) = 0$ (et $g(q) \neq 0$) on dit que q est un pôle de f .

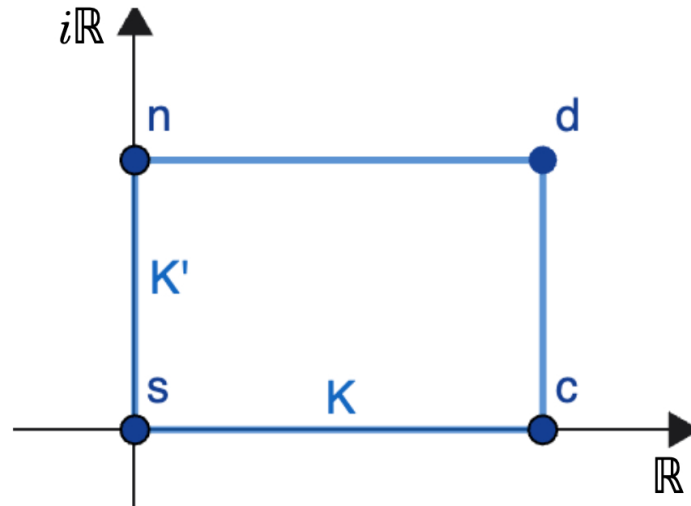
En un tel point, on a $\lim_{z \rightarrow q} |f(z)| = +\infty$.

Remarque :

Les fonctions de Jacobi (notées pq) sont des fonctions méromorphes particulières : elles

sont construites de manière à posséder un unique zéro simple au sommet p et un unique pôle simple au sommet q au sein d'un rectangle fondamental appelé rectangle de Jacobi.

b - rectangle de Jacobi



Définition (D9) : Quarts de période

Le rectangle est défini par deux paramètres appelés "quarts de période" qui dépendent du module k de l'ellipse :

période réelle : $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}}$,

période imaginaire : $K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2) \sin^2(\theta)}}$.

Définition (D10) : Sommets du rectangle

On définit quatre points, appelés sommets, dans le plan complexe :

s (source) : placé à l'origine 0,

c (coin) : placé à la distance K sur l'axe réel,

n (nadir) : placé à la distance K' sur l'axe imaginaire,

d (diagonal) : placé au point $K + iK'$.

Proposition (P3) : Construction des fonctions

Une fonction de Jacobi pq est l'unique fonction méromorphe satisfaisant :

Zéro et Pôle :

Elle admet un zéro en p et admet un pôle simple en q .

Comportement asymptotique au voisinage de 0 :

Si $p = s$ (zéro à l'origine), alors $pq(u, k) \sim u$ quand $u \rightarrow 0$,

si $q = s$ (pôle à l'origine), alors $pq(u, k) \sim \frac{1}{u}$ quand $u \rightarrow 0$,

sinon (s est un point ordinaire), alors $pq(0, k) = 1$.

Démonstration. (P3) : Admise ; l'unicité de cette construction repose sur le théorème de Liouville. ■

Exemples :

$sn(u, k)$: Zéro en s (0), pôle en n (iK'). À l'origine, $sn(u) \sim u$

$cn(u, k)$: Zéro en c (K), pôle en n (iK'). À l'origine, $cn(0) = 1$

$dn(u, k)$: Zéro en d ($K + iK'$), pôle en n (iK'). À l'origine, $dn(0) = 1$

Remarque :

Au-delà du trio fondamental (sn, cn, dn), il existe au total 12 fonctions elliptiques de Jacobi, les 9 autres étant : $cd, cs, ds, dc, ns, nc, nd, sc$ et sd .

Elles correspondent à toutes les combinaisons possibles de rapports entre les quatre sommets du rectangle (s, c, d, n).

En pratique, on n'utilise pratiquement que sn, cn et dn .

La notation est extrêmement intuitive car on dispose des propriétés suivantes.

Proposition (P4) : Règle de l'inverse

Soient $p, q \in \{s, c, d, n\}$ deux sommets distincts.

Alors : $pq = \frac{1}{qp}$.

Démonstration. (P4) : Par définition, pq a un zéro en p et un pôle en q .

La fonction inverse ces rôles : le zéro de qp (en q) devient un pôle pour $\frac{1}{qp}$ et le pôle de qp (en p) devient un zéro pour $\frac{1}{qp}$.

Les deux fonctions ayant les mêmes zéros, les mêmes pôles et le même comportement

asymptotique, sont identiques par unicité.

D'où le résultat. ■

Proposition (P5) : Règle du quotient

Soient $p, q \in \{s, c, d, n\}$ deux sommets distincts.

Alors : $pq = \frac{pn}{qn}$.

Démonstration. (P5) : Le numérateur pn admet un zéro en p et un pôle en n.

Le dénominateur qn admet un zéro en q et un pôle en n.

Dans le rapport $\frac{pn}{qn}$ les pôles en n se simplifient.

Il reste donc un zéro en p et un pôle en q (car le zéro de qn au dénominateur devient un pôle pour le quotient).

On retrouve exactement la définition de la fonction pq.

D'où le résultat par unicité. ■

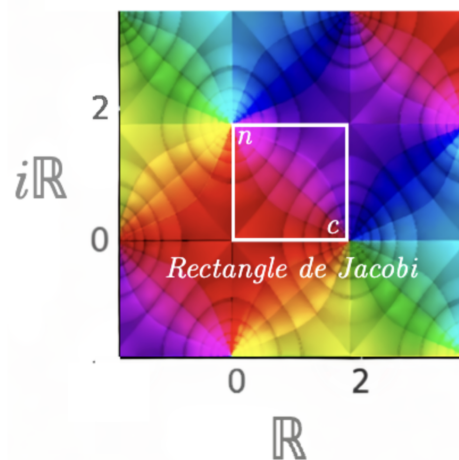
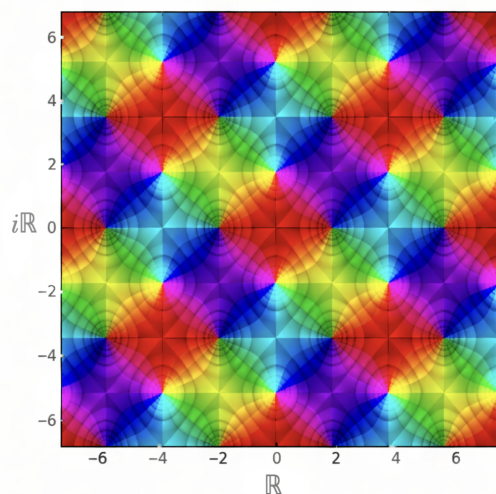
Exemple :

$$ns(u, k) = \frac{1}{sn(u, k)}$$

$$cs(u, k) = \frac{cn(u, k)}{sn(u, k)}$$

c - interprétation graphique complexe

Interprétation visuelle :



Pour visualiser une fonction complexe, on utilise souvent la coloration du domaine. Dans cette représentation, chaque point du plan complexe est coloré selon la valeur que prend la fonction en ce point : la couleur représente l'argument, et la luminosité représente le module.

Sur l'illustration ci-dessus, on représente la fonction cn dans le plan complexe. Avec un module $k = 0,8$, les dimensions du rectangle de Jacobi sont d'environ 2 sur l'axe réel (K) et 1,75 sur l'axe imaginaire (K').

Les Zéros (Sommets c) :

Sur l'axe réel, les points noirs où toutes les couleurs convergent sont les zéros simples. Le premier se situe au point K , avec $K \simeq 2$. L'obscurité totale indique que le module de la fonction y est nul.

Les Pôles (Sommets n) :

Les centres de rayonnement extrêmement clairs et brillants sont les pôles simples. Le premier se situe au point iK' , avec $K' \simeq 1.75$. La saturation lumineuse confirme que le module de la fonction tend vers l'infini.

La structure périodique :

Le motif se répète de manière identique tous les $4K$ horizontalement et tous les $4iK'$ verticalement. On observe bien cette double périodicité de la fonction cn .

II - FORMULES ET PROPRIÉTÉS

Sauf mention contraire, dans toute cette section, on fixe $k \in [0, 1[$

Définition (D11) : Domaine de définition

On définit K et K' comme dans la partie précédente.

Les fonctions de Jacobi étant méromorphes, nous définissons leur domaine de validité U comme l'ouvert de \mathbb{C} privé de l'ensemble des pôles Λ tel que :

$$U := \mathbb{C} \setminus \Lambda,$$

$$\text{où } \Lambda = \{2mK + i(2n + 1)K' \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Remarque :

Sur cet ensemble U , les fonctions sn , cn et dn sont holomorphes, ce qui garantit la validité des relations présentées ci-après.

Notation :

Par souci de clarté, nous utiliserons les notations abrégées $sn(u)$, $cn(u)$, $dn(u)$ et $am(u)$ pour désigner respectivement $sn(u, k)$, $cn(u, k)$, $dn(u, k)$ et $am(u, k)$.

Remarque préliminaire :

Il existe, bien sûr, d'autres formules que celles démontrées dans cette partie. L'analogie avec la trigonométrie étant très forte, on pourrait trouver des formules de transformées de carrées, d'arc moitié etc...

1 - Valeurs remarquables

Proposition (P6) : Valeurs remarquables

On a, aux points 0 et K :

$$sn(0) = 0, sn(K) = 1,$$

$$cn(0) = 1, cn(K) = 0,$$

$$dn(0) = 1, dn(K) = \sqrt{1 - k^2}.$$

Démonstration. (P7) : Découle de P9 et P10 ; voir suite. ■

Remarque :

L'expression $\sqrt{1 - k^2}$ est parfois appelée "comodule" et est notée k' .

2 - Relations fondamentales

Proposition (P7) : Invariant trigonométrique

$$\forall u \in U, sn^2(u) + cn^2(u) = 1$$

Démonstration. (P7) : Soit $u \in U$,

On pose $\alpha := am(u)$.

On a $sn(u) = \sin(\alpha)$ et $cn(u) = \cos(\alpha)$.

Or, on sait que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Donc $sn^2(u) + cn^2(u) = 1$.

D'où le résultat. ■

Proposition (P8) : Invariant elliptique

$$\forall u \in U, dn^2(u) + k^2 \cdot sn^2(u) = 1$$

Démonstration. (P8) : Soit $u \in U$,

On sait que $dn(u) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u, k)}$.

donc $dn^2(u) = 1 - k^2 sn^2(u, k)$,

donc $dn^2(u) + k^2 sn^2(u, k) = 1$.

D'où le résultat. ■

3 - Interpolation**Proposition (P9) : Régime circulaire**

Pour tout $u \in U$:

$$sn(u, 0) = \sin(u),$$

$$cn(u, 0) = \cos(u),$$

$$dn(u, 0) = 1.$$

Démonstration. (P9) : On sait que $u = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}$.

Pour $k = 0$, on a $u = \int_0^\alpha d\theta = \alpha$,

donc $am(u, 0) = u$,

donc $sn(u, 0) = \sin(u)$,

et $cn(u, 0) = \cos(u)$,

et $dn(u, 0) = 1$ ■

Proposition (P10) : Régime hyperbolique

Pour tout $u \in U$:

$$sn(u, 1) = \tanh(u),$$

$$cn(u, 1) = \operatorname{sech}(u) = \frac{1}{\cosh(u)},$$

$$dn(u, 1) = \operatorname{sech}(u) = \frac{1}{\cosh(u)}.$$

Démonstration. (P10) : Admise ; même principe que pour P9 mais avec des calculs d'intégrales plus techniques. ■

Remarque :

Lorsque le module est nul, l'ellipse devient le cercle unité. Les fonctions de Jacobi retombent sur les fonctions trigonométriques classiques.

Lorsque le module tend vers 1, l'ellipse s'étire à l'infini et devient une droite.

Les fonctions perdent leur périodicité réelle, d'où le fait d'exclure 1 dans le domaine de définition de k .

4 - Période

Proposition (P11) : Périodicité

Pour tout $u \in U$:

$$sn(u + 4K) = sn(u),$$

$$cn(u + 4K) = cn(u),$$

$$dn(u + 2K) = dn(u).$$

Démonstration. (P11) : Soit $u \in U$.

Pour $u = K$ on a $am(u) = \frac{\pi}{2}$,

donc pour $u = 2K$ on a $am(u) = \pi$,

et pour $u = 4K$ on a $am(u) = 2\pi$.

On a $sn(u+4K) = \sin(am(u)+2\pi) = \sin(am(u)) = sn(u)$ par 2π -périodicité de la fonction \sin .

De même, on a $cn(u + 4K) = cn(u)$.

De même pour dn en utilisant la π -périodicité de \sin^2 .

D'où le résultat. ■

Remarque :

On comprend ainsi pourquoi K est appelé "quart de période".

5 - Parité

Lemme (L1) : Imparité de l'amplitude

$$\forall u \in U, am(-u) = -am(u)$$

Démonstration. (L1) : Admise. ■

Proposition (P12) : Parité

Pour tout $u \in U$:

$$sn(-u) = -sn(u),$$

$$cn(-u) = cn(u),$$

$$dn(-u) = dn(u).$$

Démonstration. (P12) : Soit $u \in U$.

On a $sn(-u) = \sin(am(-u)) = \sin(-am(u)) = -\sin(am(u)) = -sn(u)$ d'après le lemme et l'imparité de sin.

De même pour cn.

On sait que $dn^2(u) + k^2 \cdot sn^2(u) = 1$,

$$\text{donc } dn^2(u) = 1 - k^2 \cdot sn^2(u),$$

$$\text{donc } dn^2(-u) = 1 - k^2 \cdot sn^2(-u).$$

$$\text{Or } sn^2(-u) = (-sn(u))^2 = sn^2(u).$$

$$\text{donc } dn^2(-u) = 1 - k^2 \cdot sn^2(u),$$

$$\text{donc } dn^2(-u) = dn^2(u),$$

$$\text{donc } dn(-u) = dn(u).$$

D'où le résultat. ■

6 - Addition et duplication

Proposition (P13) : Formules d'addition

Pour tout $(u, v) \in U^2$ tel que $(u + v) \in U$, on a :

$$sn(u + v) = \frac{sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)},$$

$$cn(u + v) = \frac{cn(u)cn(v) - sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)},$$

$$dn(u + v) = \frac{dn(u)dn(v) - k^2 sn(u)sn(v)cn(u)cn(v)}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)}.$$

Démonstration. (P13) : Admise. ■

Proposition (P14) : Formules de duplication

Pour tout $u \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}sn(2u) &= \frac{2sn(u)cn(u)dn(u)}{1-k^2sn^4(u)}, \\cn(2u) &= \frac{cn^2(u)-sn^2(u)dn^2(u)}{1-k^2sn^4(u)}, \\dn(2u) &= \frac{dn^2(u)-k^2sn^2(u)cn^2(u)}{1-k^2sn^4(u)}.\end{aligned}$$

Démonstration. (P14) : Immédiat grâce à P13 en considérant " $sn(u + u)$ ", " $cn(u + u)$ " et " $dn(u + u)$ ". ■

7 - Calcul différentiel et intégral

Remarque :

Les formules de dérivation et d'intégration présentées ci-dessous s'étendent par prolongement analytique à l'ensemble du domaine U .

a - dérivées

Lemme (L2) : Dérivation de l'amplitude

$$\forall u \in \mathbb{R}, am'(u) = dn(u)$$

Démonstration. (L2) : On sait que $u = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}}$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a, par dérivation :

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\alpha)}},$$

donc $\frac{d\alpha}{du} = \sqrt{1-k^2\sin^2(\alpha)}$.

Or $\alpha = am(u)$,

donc $am'(u) = dn(u)$.

D'où le résultat. ■

Proposition (P14) : Dérivation

Pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$sn'(u) = cn(u)dn(u),$$

$$cn'(u) = -sn(u)dn(u),$$

$$dn'(u) = -k^2 sn(u)cn(u).$$

Démonstration. (P14) : Soit $u \in \mathbb{C}$

On sait que $sn(u) = \sin(am(u))$

Donc, d'après la formule de dérivation d'une fonction composée, on a

$$sn'(u) = am'(u) \cos(am(u))$$

donc $sn'(u) = dn(u) \cos(am(u))$ d'après le lemme.

$$\text{Donc } sn'(u) = dn(u)cn(u).$$

De même pour cn .

$$\text{On sait que } dn^2(u) + k^2 \cdot sn^2(u) = 1.$$

$$\text{En dérivant, } 2dn(u)dn'(u) + k^2 2sn(u)sn'(u) = 0.$$

En remplaçant $sn'(u)$ par $cn(u)dn(u)$ et en simplifiant par $2dn(u)$ on obtient :

$$dn'(u) = -k^2 sn(u)cn(u) .$$

D'où le résultat ■

b - primitives**Proposition (P15) : Primitives**

Soit $C \in \mathbb{R}$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\int sn(u)du = \frac{1}{k} \ln |dn(u) - kcn(u)| + C,$$

$$\int cn(u)du = \frac{1}{k} \arccos(dn(u)) + C,$$

$$\int dn(u)du = am(u) + C.$$

Démonstration. (P15) : Soit $u \in \mathbb{R}$.

Pour dn : OK d'après ce qui précède.

$$\text{On pose } SN(u) := \frac{1}{k} \ln |dn(u) - kcn(u)| + C.$$

$$\text{On a } SN'(u) = \frac{1}{k} \frac{dn'(u) - ksn'(u)}{dn(u) - kcn(u)} = \frac{1}{k} \frac{-k^2 sn(u)cn(u) - k(-sn(u)dn(u))}{dn(u) - kcn(u)} = \frac{1}{k} \frac{k sn(u)[-kcn(u) + dn(u)]}{dn(u) - kcn(u)} = sn(u).$$

On pose $CN(u) := \frac{1}{k} \arccos(dn(u)) + C$.

On a $CN'(u) = \frac{1}{k} \left(\frac{-1}{\sqrt{1-dn^2(u)}} \right) dn'(u) = \frac{1}{k} \left(\frac{-1}{\sqrt{k^2 sn^2(u)}} \right) [-k^2 sn(u)cn(u)] = cn(u)$.

D'où le résultat. ■

8 - Équations différentielles

Proposition (P16) : Équations différentielles

La fonction sn est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + (1 + k^2)y - 2k^2y^3 = 0.$$

La fonction cn est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + (1 - 2k^2)y + 2k^2y^3 = 0.$$

La fonction dn est solution de l'équation différentielle :

$$y'' - (2 - k^2)y + 2y^3 = 0.$$

Démonstration. (P16) : Soit $u \in \mathbb{R}$.

On sait que $sn'(u) = cn(u)dn(u)$,

donc $sn''(u) = cn'(u)dn(u) + cn(u)dn'(u)$,

donc $sn''(u) = [-sn(u)dn(u)]dn(u) + cn(u)[-k^2 sn(u)cn(u)]$,

donc $sn''(u) = -sn(u)dn^2(u) - k^2 sn(u)cn^2(u)$.

En utilisant les relations fondamentales P7 et P8, on obtient :

$$sn''(u) = -sn(u)[1 - k^2 sn^2(u)] - k^2 sn(u)[1 - sn^2(u)],$$

donc $sn''(u) = -sn(u) + k^2 sn^3(u) - k^2 sn(u) + k^2 sn^3(u)$,

donc $sn''(u) = -(1 + k^2)sn(u) + 2k^2 sn^3(u)$.

On procède de même pour cn et dn.

D'où le résultat. ■

III - APPLICATIONS

Remarque préliminaire :

Après avoir établi la rigueur nécessaire à la définition des fonctions de Jacobi, cette troisième partie adopte une approche plus applicative. Nous privilégierons ici l'interprétation des résultats et la mise en évidence des liens entre les différents domaines abordés, au dessus du formalisme. Dans cette partie, toute propriété et théorème sera considéré comme admis et ne sera pas démontré.

1 - Moyenne arithmético-géométrique (AGM)

Pour évaluer numériquement les fonctions de Jacobi et leurs périodes, l'approche par intégration directe est souvent inefficace. On utilise alors l'algorithme de la Moyenne Arithmético-Géométrique (AGM), une méthode très puissante.

a - définition

Définition (D12) : Suites arithmético-géométriques

Soient deux réels strictement positifs a_0 et b_0 tels que $a_0 \geq b_0$.

On définit les suites couplées $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, & (\text{Moyenne arithmétique}) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. & (\text{Moyenne géométrique}) \end{cases}$$

Proposition (P17) : Convergence et limite

On démontre que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent vers une limite commune unique, notée $M(a_0, b_0)$, appelée moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0 .

b - application

Rappel :

On a défini précédemment :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}.$$

Théorème (T1) : Gauss - Calcul de la période

Soit $k \in [0, 1[$.

Le lien avec notre étude réside dans la capacité de l'AGM à calculer l'intégrale de première espèce K sans passer par un calcul de primitives impossible :

$$K = \frac{\pi}{2M(1, k')},$$

où $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

D'un point de vue pratique, cet outil est fondamental pour deux raisons :

L'analogie de la circularisation : Chaque itération de l'AGM réduit l'écart entre a_n et b_n . Géométriquement, cela revient à transformer progressivement une ellipse en un cercle parfait. La limite $M(1, k')$ représente le rayon du cercle final, ce qui explique la présence de π dans la formule de la période.

La convergence quadratique : L'AGM possède une convergence dite "quadratique" : le nombre de chiffres significatifs exacts double à chaque étape. En seulement 4 ou 5 itérations, on obtient une précision suffisante pour n'importe quelle application physique, là où des méthodes classiques demanderaient des milliers de calculs.

2 - Pendule simple

L'application la plus emblématique des fonctions de Jacobi est sans doute la résolution exacte du pendule simple pesant, d'équation :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0,$$

où θ est l'angle d'oscillation, l la longueur du fil, et g la constante de gravité.

Alors que l'approximation linéaire $\sin(\theta) \sim \theta$ limite l'étude aux petites oscillations, le formalisme de Jacobi permet de décrire le mouvement pour n'importe quelle amplitude.

a - expression et période

En partant de la conservation de l'énergie mécanique et en effectuant un changement de variable, on établit que l'angle d'oscillation θ est régi par la relation suivante :

$$\theta(t) = 2 \arcsin(k \cdot \operatorname{sn}(\omega_0 t, k)),$$

où $k = \sin(\frac{\theta_0}{2})$ le module de Jacobi, et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ la pulsation propre.

Grâce à la définition de la période K vue en (D12), nous pouvons exprimer la période réelle T du pendule :

$$T = \frac{4K}{\omega_0}.$$

En utilisant l'algorithme de l'AGM présenté précédemment, on peut calculer cette période avec une précision extrême.

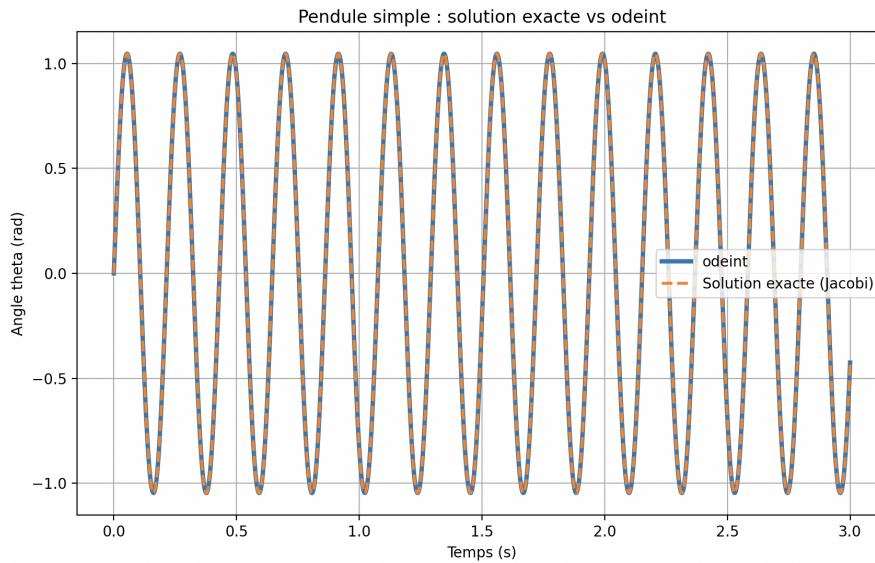
Remarque :

Pour des angles importants, T augmente significativement : c'est le phénomène de non-isochronisme des oscillations.

b - simulation numérique

Pour valider cette approche théorique, on peut utiliser un script Python comparant la solution exacte (Jacobi) à une intégration numérique classique (méthode odeint).

On se place dans le cas où $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$, $l = 10$ cm et $g = 9,81$ $m \cdot s^{-2}$.



Le graphique ci-dessus confirme la superposition parfaite des courbes. L'utilisation des fonctions de Jacobi est d'une grande efficacité pour modéliser des systèmes physiques complexes sans accumuler les erreurs d'approximation numérique.

Note :

La preuve de l'expression exacte de l'angle d'oscillation du pendule ainsi que le code python sont disponibles sur noahroetman.github.io.

3 - Ondes non linéaires

Si les fonctions de Jacobi décrivent le balancement du pendule, elles sont également au cœur de la théorie des solitons : des ondes solitaires qui se propagent sans se déformer.

L'équation de Korteweg-de Vries modélise les vagues en eau peu profonde :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

On peut montrer que la solution périodique de cette équation ne s'exprime pas avec un sinus, mais avec la fonction cn de Jacobi. C'est pour cette raison qu'on appelle ces vagues des ondes cnodaïles (le "cn" venant de la fonction).

Contrairement à une houle sinusoïdale classique, les ondes cnodaïles ont des crêtes très marquées et des creux très plats. C'est exactement ce que l'on observe sur les côtes lorsque la profondeur diminue.

Lorsque le module k tend vers 1, la période devient infinie. L'onde ne se répète plus : on obtient une bosse unique appelée soliton. Mathématiquement, la fonction cn devient une sécante hyperbolique ($sech = \frac{1}{cosh}$), décrivant une vague isolée capable de parcourir des milliers de kilomètres sans s'amortir.

4 - Cryptographie et théorie des nombres

Comme on l'a vu, les fonctions elliptiques de Jacobi sont liées aux courbes elliptiques. Celles-ci sont aujourd'hui utilisées en cryptographie. Elles permettent, dans un cadre continu, de paramétrer ces courbes et d'exprimer leurs formules d'addition, ce qui met en évidence leur structure de groupe.

En cryptographie, on retrouve cette même structure, mais dans un cadre discret : on travaille sur des courbes elliptiques définies dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Le protocole Ed25519 en est un exemple. Il repose sur le fait qu'il est facile de calculer des multiples d'un point sur la courbe, mais extrêmement difficile de retrouver le multiplicateur à partir du résultat (problème du logarithme discret).

Les fonctions de Jacobi ne sont donc pas utilisées directement, mais elles ont joué un rôle théorique important pour comprendre les propriétés des courbes elliptiques sur lesquelles repose cette cryptographie.

CONCLUSION

L'objectif de cette étude était de mieux comprendre les fonctions elliptiques de Jacobi, nées d'une question simple : mesurer l'arc d'une ellipse, afin d'en saisir toute la profondeur mathématique et l'utilité. Ce travail montre qu'elles ne sont pas de simples curiosités géométriques. Leur propriété fondamentale, la double périodicité dans le plan complexe, gouverne leur comportement et explique leur richesse.

Au final, les fonctions de Jacobi illustrent bien comment une idée née de la géométrie peut évoluer vers un outil mathématique très puissant, capable d'apporter une description exacte de phénomènes que la physique traite souvent avec des approximations.